EPITA

S1

Mathématiques

Séminaire de rentrée

(7 septembre - 18 septembre 2026)

Table des matières

Les acronymes **3**

ECUE **3**

Motivation **3**

AAV **5**

1 Logique propositionnelle **7**
1.1 Résumé . . . 7
1.2 Exercices . . . 7
Exercice 1.1 . . . 7
Exercice 1.2 . . . 7
Exercice 1.3 . . . 8
Exercice 1.4 . . . 8
Exercice 1.5 . . . 8
Exercice 1.6 . . . 9
Exercice 1.7 . . . 9

2 Ensembles **10**
2.1 Ensembles : définitions et opérations . . . 10
2.1.1 Résumé . . . 10
2.1.2 Exercices . . . 10
Exercice 2.8 . . . 10
Exercice 2.9 . . . 10
Exercice 2.10 . . . 11
Exercice 2.11 . . . 11
2.2 Ensembles finis . . . 12
2.2.1 Résumé . . . 12
2.2.2 Exercices . . . 12
Exercice 2.12 . . . 12
Exercice 2.13 . . . 12

3 Fonctions **13**
3.1 Image directe et réciproque . . . 13
3.1.1 Résumé . . . 13
3.1.2 Exercices . . . 13
Exercice 3.14 . . . 13
Exercice 3.15 . . . 14
Exercice 3.16 . . . 14
Exercice 3.17 . . . 14
Exercice 3.18 . . . 14
3.2 Injectivité et surjectivité . . . 15
3.2.1 Résumé . . . 15
3.2.2 Exercices . . . 15
Exercice 3.19 . . . 15
Exercice 3.20 . . . 15
Exercice 3.21 . . . 15
Exercice 3.22 . . . 16
Exercice 3.23 . . . 17
Exercice 3.24 . . . 17
★ Exercice 3.25 . . . 18

4 Raisonnements **19**
4.1 Résumé . . . 19
4.2 Comment rédiger ? . . . 19
4.3 Exercices . . . 20
Exercice 4.26 . . . 20
Exercice 4.27 . . . 21
Exercice 4.28 . . . 21
Exercice 4.29 . . . 21
Exercice 4.30 . . . 21
★ Exercice 4.31 . . . 21
Exercice 4.32 . . . 21
Exercice 4.33 . . . 22

Se familiariser avec nos acronymes

Vous allez en entendre parler tout au long de l'année, alors autant vous familiariser avec ce vocabulaire dès maintenant.

- **UE**
  Une UE est une Unité d'Enseignement. Toute la partie mathématique en classe préparatoire à l'EPITA est dans l'UE « Concevoir ».
- **ECUE**
  Un ECUE est un Élément Constitutif d'Unité d'Enseignement. Au semestre 1, dans l'UE « Concevoir », il y aura 3 ECUE concernant les mathématiques.
- **AAV**
  Les AAV sont les Acquis d'Apprentissages Visés. Pour les mathématiques, ils seront systématiquement écrits sur les feuilles de TD. Cela correspond à ce que vous devez savoir faire à la fin du chapitre.
- **SAÉ**
  Les SAÉ sont les Situations Authentiques d'Évaluation. Cela concerne tous les projets, stages...

ECUE concerné par le séminaire

Le séminaire forme à lui tout seul l'ECUE OBM : outils de base mathématiques.

Les prérequis pour cet ECUE sont :

- Connaitre les ensembles de nombres usuels.
- Connaitre les fonctions usuelles, en particulier tout le polycopié mis à votre disposition.

Remarque :

Cet ECUE est un prérequis à tous les autres ECUE du cycle préparatoire pour les mathématiques.

Motivation

Certains d'entre vous considèrent aujourd'hui que les mathématiques consistent en une série de formules à apprendre par cœur ou d'antisèches à rentrer dans une calculatrice programmable, au service de l'apparition spontanée de résultats qui n'ont aucun sens mais qui rapportent quelques demi-points. Les plus cyniques iront même jusqu'à penser que le seul intérêt des mathématiques est de pouvoir devenir plus tard professeur de mathématiques et ainsi assurer la perpétuation d'une certaine tradition du sadisme.

Ces points de vue ne sont pas tout à fait corrects.

Les mathématiques sont d'abord ***l'art de faire des conjectures, d'essayer de les démontrer ou de les infirmer***, dans le but de ***mieux comprendre*** les phénomènes que l'on étudie et d'en ***prévoir*** les résultats. En ce sens, comme Monsieur Jourdain nous faisons tous des mathématiques [1] sans le savoir ! Les mathématiques forment une science qui repose sur le raisonnement plus que sur l'expérimentation, de par la manière dont elle est formalisée : on travaille à modifier des propriétés que l'on sait justes par des transformations qui gardent leur caractère correct, jusqu'à arriver à un résultat qui nous permette de conclure quant à notre recherche : c'est le côté « science exacte ». Cet aspect rigoureux ne doit cependant pas occulter la partie un petit peu expérimentale : ***il est important de tenter des choses***, de ne pas s'arrêter si le premier raisonnement n'est pas le bon (figure 1) ou si l'on n'a pas de manière immédiate un résultat définitif, et de ne pas hésiter à tester des cas particuliers avant de se lancer dans le cas général, ce qui parfois permettra de mettre en lumière une faille ou un contre-exemple et d'autres fois aidera à comprendre l'architecture sous-jacente d'un problème.

Pour tout cela il est important de savoir manipuler le langage des mathématiques et toutes les possibilités qu'il offre. Ce sera le but de la première partie consacrée à la logique.

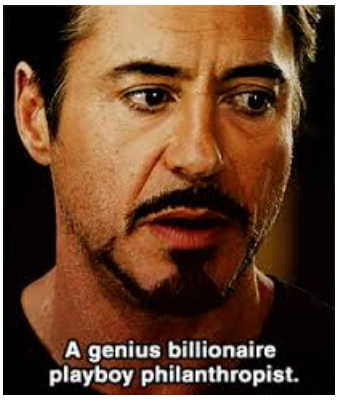
1. Et du français donc. Vous pourrez interroger votre enseignant de méthodologie à ce sujet.

FIGURE 1 – `Les Shadoks, de Jacques Rouxel`



Nous travaillerons ensuite sur les premiers exemples de constructions mathématiques. Nous introduirons ainsi brièvement le vocabulaire ensembliste. La plupart des environnements mathématiques que nous rencontrerons cette année sont des ensembles (l'univers en probabilité, l'ensemble des suites réelles, les espaces vectoriels). On s'autorisera dans ces ensembles des opérations entre éléments, quelques exemples de relations à définir entre éléments...

La partie « Fonctions » introduira le vocabulaire fonctionnel. Il fait écho au typage fort que vous étudiez actuellement avec `CamL`. C'est d'ailleurs un exemple des correspondances que vous retrouverez toute l'année entre les mathématiques et l'algorithmique : il ne sera pas rare d'aborder un même problème sous les deux aspects, et ce de manière complémentaire. En effet, que serait un ingénieur en informatique sans une formation solide en mathématiques ?



Un autre aspect dont l'importance est trop souvent sous-estimée est la capacité à savoir ***représenter*** les problèmes et plus généralement les objets : sous forme graphique, géométrique ou sous forme d'énoncés clairs et succincts. Il faut savoir faire cette mécanique de transcription dans les deux sens ; cela permet non seulement de se représenter mentalement les choses de manière plus simple, et ainsi de pouvoir imaginer des structures plus complexes, mais il est souvent plus facile d'avoir une idée d'exemple ou de contre-exemple comme quelque chose que l'on peut dessiner. Sans négliger l'aspect communication : un ingénieur en informatique sera amené à présenter des idées sur des objets assez complexes, il sera nécessaire pour cela d'être capable de condenser les notions importantes sur des schémas simples et clairs (figure 2). Nous travaillerons donc cet aspect de représentation en imaginant plusieurs manières de dessiner des problèmes et en discutant de leurs avantages et inconvénients respectifs.

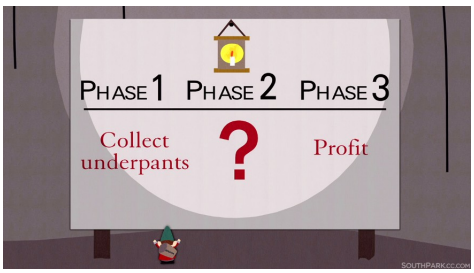
!h 

FIGURE 2 – `Être capable de présenter un graphe clair peut aider à faire comprendre un raisonnement, voire à pointer des failles dans un plan qui paraissait pourtant parfait (SOUTH PARK : Gnomes business plan).`

Acquis d'apprentissages visés (AAV)

Voilà les AAV détaillés pour cette partie séminaire. Au final, vous devez être capable de :

1. Partie « logique » :
   - Reconnaître les connecteurs logiques dans une assertion.
   - Utiliser les quantificateurs universel et existentiel.
   - Traduire une assertion en syntaxe mathématique et les combiner pour créer de nouvelles assertions.
   - Formuler la négation et la contraposée d'une implication, en langage mathématique comme en langage courant.
2. Partie « ensembles »
   - Utiliser correctement le vocabulaire ensembliste en particulier distinguer les symboles d'appartenance et d'inclusion.
   - Manipuler les opérations sur les ensembles et les sous-ensembles : inclusion, union, intersection, complémentaire, partition, produit cartésien.
   - Pour les ensembles finis, calculer le cardinal d'un ensemble, d'une union, d'un produit cartésien ou de l'ensemble des parties d'un ensemble.
3. Partie « fonctions »
   - Démontrer qu'une fonction usuelle ou une fonction définie par un graphe est injective, surjective ou bijective.
   - Modifier les ensembles de départ et d'arrivée pour rendre une fonction (usuelle ou une fonction définie par un graphe) injective, surjective ou bijective.
   - Déterminer l'image ou l'image réciproque d'un ensemble par une fonction usuelle ou une fonction définie par un graphe.
   - Découvrir la fonction arctan comme fonction réciproque de la fonction tangente. Dessiner l'allure et trouver des valeurs remarquables
4. Partie « Raisonnements »
   - Démontrer une propriété simple par preuve directe, par contraposée, par l'absurde ou par récurrence.
   - Démontrer une inclusion ou une égalité d'ensembles.

Quelques consignes et explications

On vous le dira, redira, re-redira, rabâchera : **vous devez apprendre votre cours par cœur.** C'est votre priorité. Vous ne réussirez pas (plus) à faire les exercices sans une connaissance approfondie du cours ! Et il faut s'y mettre dès votre premier jour à l'EPITA.

Dans cette feuille, les exercices indiqués « **(Maison)** » sont des exercices supplémentaires à faire en autonomie chez vous ou pendant vos séances d'étude à la fin de chaque journée. Ils ne seront pas forcément corrigés en classe par le professeur...

Les exercices étoilés ($\star$) sont souvent plus difficiles. Ils sont pour les étudiants qui ont très bien compris le reste de la feuille de TD et qui veulent aller plus loin. Ils ne seront pas corrigés en classe. Mais rien ne vous empêche de demander de l'aide à votre professeur si vous n'y arrivez pas....

1 Logique propositionnelle

Cette première partie consacrée à la logique présente les rudiments de la ***formalisation***, c'est-à-dire la manière de transposer des propriétés venant d'intuitions ou du langage parlé en objets mathématiques sur lesquels on va pouvoir opérer des modifications selon des règles préétablies. Pour cela, nous allons doter notre langage d'un alphabet (un ensemble de caractères), de règles de syntaxe (la manière d'agencer ces caractères pour obtenir du sens) et des opérations qui nous permettront de faire évoluer le sens tout en gardant la correction syntaxique.

1.1 Résumé

La logique propositionnelle définit des règles et des usages concernant la manipulation de la syntaxe mathématique. Elle nous permet alors de bâtir des phrases traduisant des idées de plus en plus compliquées à l'aide de connecteurs logiques. Dans la logique de tiers exclu que nous utiliserons, il est possible d'évaluer toute expression obtenue afin de déterminer sa valeur booléenne – vraie ou fausse – en fonction des valeurs des propositions élémentaires qui la composent.

Cette possibilité d'évaluation n'est pas le seul intérêt de cette partie : vous vous rendrez compte que les constructions que nous allons utiliser ici seront reprises quasiment à l'identique pour définir les opérations sur les ensembles qui formeront la seconde partie de ce séminaire.

1.2 Exercices

Exercice 1.1

Soit x un réel. On considère les assertions :

$$P(x) :\text{« } x \leq 1 \text{ »},\ Q(x) : \text{« } -1 < x \leq 2 \text{ »} \text{ et } R(x) :\text{« } 0 \leq x < 4 \text{ »}$$

1. Si $x = -3$, quelles sont les assertions vraies parmi P, $\neg Q$, $\neg Q \vee R$, $\neg Q \wedge R$, $\neg P \wedge Q$, $\neg R \wedge P$?
2. **(Maison)** Mêmes questions si $x = 3$.
3. Donner $P(x) \vee (Q(x) \wedge R(x))$ et $(P(x) \vee Q(x)) \wedge (P(x) \vee R(x))$.
4. **(Maison)** Mêmes questions pour $P \wedge (Q \vee R)$ et $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$.

Exercice 1.2

Les questions sont indépendantes.

1. Donner une condition nécessaire (par forcément suffisante) à « J'ai eu mon BAC ». De même, donner une condition suffisante (par forcément nécessaire) à « J'ai eu mon BAC ».
2. Même question avec « Didier fait des compétitions de natation à haut niveau ».
3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Mettre le symbole $\Longrightarrow$, $\Longleftarrow$ ou $\Longleftrightarrow$ à la place des pointillés :

   (a) $x^2 > 4$ ..... $x > 2$ **(b)** $x = \pi$ ..... $\sin(x) = 0$ **(c)** $\sqrt{x^2} = 1$ ..... $x = 1$
   (d) $\dfrac{x^2}{3} = 0$ ..... $x = 0$ **(e)** $\dfrac{x^2}{3} = 1$ ..... $x = \sqrt{3}$ **(f)** $e^{x+1} = 1$ ..... $x = -1$
   (g) $x < 1$ ..... $|x| < 1$ **(h)** $x^2 - x > 0$ ..... $x > 1$ **(i)** $\ln(x^2 + 1) = 0$ ..... $x = 0$

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère l'assertion $P(x)$: « $x^2 > 1 \Longrightarrow$ ($x < -1$ ou $x > 1$) ». Écrire la négation et la contraposée de $P(x)$.

Exercice 1.3

On considère une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. Traduire les propriétés suivantes en syntaxe mathématique :
   (a) f est bornée.
   (b) f ne s'annule jamais.
   (c) f est constante.
   (d) f est paire. De même, f est impaire.
   (e) f est périodique.
   (f) f n'est pas la fonction nulle.
   (g) f est positive sur $\mathbb{R}^+$ (de deux manières : avec un quantificateur d'une part, avec une implication d'autre part).
2. Écrire la négation de toutes les propriétés ci-dessus.

Exercice 1.4

On observe une mare. On note M l'ensemble des éléments se trouvant dans la mare, P l'ensemble des poissons dans la mare et R l'ensemble de tout ce qui est de couleur rouge (dans la mare).

Traduire les phrases suivantes à l'aide des quantificateurs.

1. « Tous les poissons sont rouges »
2. « Il existe des poissons rouges »
3. « Il n'y a que les poissons qui sont rouges »
4. « Il existe un poisson qui n'est pas rouge »

Exercice 1.5

Écrire la négation des phrases suivantes, sachant que le terme « certains » signifie ici « au moins un ».

1. « Cette maison est grande ».
2. « Toutes les vérités sont bonnes à dire ».
3. « Certains poissons sont rouges ! ».
4. « Aucune piste criminelle n'est écartée ».
5. « Certains chats ne sont pas noirs ».
6. « S'il fait beau alors je vais à la plage ».
7. « Tu peux sortir si et seulement si tu fais tes devoirs ! ».
8. **(Maison)** « Tous les chats sont gris »
9. **(Maison)** « Certains étudiants ne s'endorment pas en cours de maths »
10. **(Maison)** « Si je me couche tard alors je ne vais pas en cours de maths »
11. **(Maison)** « Certains étudiants s'endorment en cours de maths ! ».

Exercice 1.6

Pour chacune des assertions suivantes, spécifier si l'assertion est vraie ou fausse, puis écrire sa négation.

1. $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \exists\, y \in \mathbb{R}, \quad x + y > 0$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall\, y \in \mathbb{R}, \quad x + y > 0$
3. $\exists\, y \in \mathbb{R}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad x + y > 0$
4. $\exists\, x \in \mathbb{R}, \quad \exists\, y \in \mathbb{R}, \quad x + y > 0$

Exercice 1.7

1. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.
   (a) « $\forall\, a \in \mathbb{R}, \forall\, b \in \mathbb{R}, (a+b)^2 = a^2 + b^2$ »
   (b) « $\forall\, x \in \mathbb{R}, \exists\, y \in \mathbb{R}, y > x$ »
   (c) « $\exists\, y \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ y > x$ »
   (d) « $\exists\, y \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathbb{R}^+,\ y \leq x$ »
   (e) « $\forall\, x \in \mathbb{R}^*, \exists\, y \in \mathbb{R}, xy = 3$ »
   (f) « $\forall\, x \in \mathbb{R}, \exists\, y \in \mathbb{R}, x = y^2$ »
   (g) « $\forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, y \in \mathbb{R}, \big(x > y \implies x^2 > y^2\big)$ »
   (h) « $\forall\, x \in \mathbb{R}, x > 5 \implies (x-1)(x-6) < 0$ »
   (i) « $\forall\, a \in \mathbb{N}, \exists\, (b, c) \in \mathbb{N}^2, a = b + c$ »
2. **(Maison)** Écrire la négation des assertions précédentes ainsi que la contraposée de (g) et (h).
3. Traduire les énoncés suivants à l'aide de quantificateurs et préciser si ils sont vrais ou faux :
   (a) « Le carré de tout réel est positif »
   (b) « Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré »
   (c) « Tous les polynômes réels de degré 2 ont deux racines réelles distinctes »
   (d) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. « Si deux réels ont la même image par f alors ils sont égaux »
   (e) Soit $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$. « Tout réel admet au moins antécédent par f »

2 Ensembles

Cette partie a pour but de compléter la précédente en rajoutant une chose essentielle dans toute langue : le vocabulaire. On va introduire les objets et relations de base dont l'on se servira pour écrire les propriétés mathématiques que l'on utilisera et démontrera au cours de l'année.

Les ensembles sont le premier type de construction mathématique. La plupart des environnements mathématiques que l'on utilisera sont des ***structures algébriques***, c'est-à-dire des ensembles dans lesquels on autorise des opérations [2] entre éléments ; les ensembles jouent donc ce rôle d'univers dans lequel on va raisonner. Mais à une échelle plus simple, ce sont des objets que l'on va manipuler comme tels.

La relation d'appartenance est la manière de caractériser un ensemble : on peut la voir comme une fonction sur un univers d'éléments à valeurs booléennes : vrai si l'élément appartient à l'ensemble, faux s'il ne lui appartient pas. Elle permet d'écrire des premières assertions sur les éléments et les ensembles, et toutes les opérations que l'on va manipuler sur les ensembles peuvent être exprimées comme des connexions logiques impliquant des relations d'appartenance.

2.1 Ensembles : définitions et opérations

2.1.1 Résumé

On commence par évoquer les différentes manières de définir un ensemble. Il faut remarquer qu'à l'aide de la relation d'appartenance, on peut définir des opérations qui prolongent les connecteurs logiques utilisés sur les assertions d'appartenance : le complémentaire pour la négation, l'union pour la disjonction et l'intersection pour la conjonction. Ainsi, ces connecteurs logiques d'une part, opérations ensemblistes d'autre part vérifieront les mêmes règles de calcul.

D'autres opérations usuelles sont à ranger sur un plan différent. Le produit cartésien de deux ensembles crée un ensemble qui n'a en quelque sorte "pas le même type" que les deux ensembles de base : il s'agit d'un ensemble contenant des couples (des paires orientées).

Enfin, l'ensemble des parties d'un ensemble est celui qui regroupe tous les sous-ensembles de l'ensemble choisi. C'est un ensemble d'ensembles, on pourra utiliser de telles constructions en dénombrement ou plus tard pour des démonstrations exhaustives sur des structures plus compliquées.

2.1.2 Exercices

Exercice 2.8

Considérons $f : x \longmapsto \sin(x)$. On s'intéresse à l'ensemble E des réels qui annulent f. On définit les deux ensembles suivants :

$$E_1 = \{\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0\} \text{ et } E_2 = \{\exists\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0\}$$

1. Lire ces deux ensembles à haute voix. L'un de ces deux ensembles correspond-il à E ? Sinon, donner la bonne écriture, en compréhension, de l'ensemble E.
2. Écrire E par description paramétrique.

Exercice 2.9

1. Écrire en extension les ensembles suivants :

$$A = \left\{n \in \mathbb{N},\ \sqrt{2} < n < 2\pi\right\} \text{ et } B = \left\{x \in [0, 20],\ \exists\, n \in \mathbb{N}, x = n^2\right\}$$

2. Comparer les deux ensembles suivants : $E = \{n \in \mathbb{N}, \exists\, k \in \mathbb{N}, n = 2k\}$ et $F = \{2p, p \in \mathbb{N}\}$.

2. Par exemple, si l'on considère l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels (écrits en base 10), on peut y adjoindre de nombreuses opérations binaires : addition, multiplication, concaténation... le choix d'un ensemble et de certaines opérations définit une structure.

3. Écrire les ensembles suivants en extension, en compréhension (description conditionnelle) et par description paramétrique (quand cela s'y prête) :

   (a) L'ensemble des entiers naturels impairs strictement plus petits que 20.

   (b) Dans le plan : la droite d'équation $y = x$.

   (c) L'ensemble des entiers strictement compris entre 2 et 30 et multiples de 4.

   (d) L'ensemble des solutions réelles de l'équation $(x-1)(x^2-5x+6) = 0$.

   (e) L'ensemble des réels compris entre -3π et 3π dont le sinus est nul.

   (f) L'ensemble des fonctions réelles paires.

4. Que signifient les ensembles suivants ? Pour chacun d'entre eux, donner des éléments qui y appartiennent et d'autres qui n'y appartiennent pas.

   (a) $E = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0\}$.

   (b) $F = \left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \geq 0\right\}$

   (c) $G = \{x \in \mathbb{R},\ \exists\, y \in \mathbb{R}, x = y^2\}$

5. Soit $A = [\![0, 10]\!]$. Mettre le symbole $\in$, $\notin$, $\subset$ ou $\not\subset$ à la place des pointillés

   a) -1 ... A, **b)** 2 ... A, **c)** $\emptyset$ ... A, **d)** $\{5\}$ ... A, **(e)** $\{3\}$ ... $\{1, 2, 3\}$, **(f)** $\{3\}$ ... $\mathcal{P}(A)$.

6. Mettre le symbole $\in$, $\notin$, $\subset$ ou $\not\subset$ afin de rendre les assertions bien écrites et correctes.

   a) -1 ... $\{n \in \mathbb{Z}, n^2 > 1\}$, **b)** $(1, 2)$ ... $\{(x, y) \in \mathbb{N}^2,\ x^2 + y^2 = 5\}$,

   c) $\{0, 1\}$ ... $\{(x, y) \in \mathbb{N}^2, x > y\}$, **d)** $\{5\}$ ... $\mathcal{P}(\{-4, 1, 5\})$

Exercice 2.10

On considère les ensembles $A = \{x \in \mathbb{R}, -1 < x < 10\}$ et $B = \{n \in \mathbb{N},\ n + 1 \leq 8\}$.

1. De quel ensemble commun de référence A et B sont-ils deux sous-ensembles ?
2. Dans chacune des phrases suivantes, remplacer les pointillés afin de la rendre vraie (remplacer les pointillés par $\emptyset$ est interdit).

   Exemple : pour $\cdots\cdots \in B$*, on peut remplacer les pointillés par* 0 *car* $0 \in B$*.*

   (a) $\cdots\cdots\cdots \in A$ **(b)** $\cdots\cdots\cdots \notin A \cup B$ **(c)** $\cdots\cdots\cdots \subset A \cup B$ **(d)** $\cdots\cdots\cdots \in A \cap B$ **(e)** $\cdots\cdots\cdots \subset A \times B$.

3. Quel est le complémentaire de B dans $\mathbb{Z}$?

Exercice 2.11

On considère les trois sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}$: $A = [0, 3]$, $B =]-1, 10]$ et $C = [2, 20]$.

Trouver $A \cap B$, $A \cup B$, $(A \cup C) \cap B$, $(A \cap B) \cup (C \cap B)$, $(A \cap C) \cup B$ et $\overline{A} \cup C$.

Faire le lien avec les connecteurs logiques vus dans la première partie.

2.2 Ensembles finis

2.2.1 Résumé

Les ensembles finis sont ceux qui sont le plus faciles à utiliser : on peut en effet réduire leur étude à une énumération exhaustive (par force brute) des cas de figure rencontrés lors des diverses opérations utilisées. De nombreux problèmes algorithmiques reviennent à compter les éléments d'un ensemble ; il faut donc savoir modéliser le problème, c'est-à-dire identifier l'ensemble pertinent, puis réussir à effectuer le décompte de ses éléments : ce sera le sujet du chapitre sur le dénombrement qui suivra ce séminaire.

Même sans avoir un décompte exact, il peut être utile de trouver un ordre de grandeur ou une approximation (minoration, majoration, encadrement) de la taille d'un problème donné : cela peut aider à résoudre certains problèmes matériels comme la gestion de la capacité, la mise en œuvre d'une certaine quantité de ressources, le temps nécessaire etc. À défaut d'un compte exact parfois pénible à trouver, il suffit parfois d'une bonne approximation facile à calculer, ce genre de compromis est à l'origine de nombreuses discussions algorithmiques.

2.2.2 Exercices

Exercice 2.12

Considérons les ensembles $E = \{1, 2, 3\}$ et $F = \{a, b\}$ où $(a, b) \notin \{1, 2, 3\}^2$.

1. Exprimer les ensembles $E \times F$ et $F \times E$. Combien ces ensembles ont-ils d'éléments ? Combien ont-ils d'éléments en commun ?
2. Exprimer $\mathscr{P}(E)$ et $\mathscr{P}(F)$. Pour un ensemble X quelconque, peut-on intuiter quelque chose sur le nombre d'éléments de $\mathscr{P}(X)$ par rapport à celui de X ?

Exercice 2.13

1. Soient E et F deux ensembles finis disjoints. Que vaut $\mathrm{Card}(E \cup F)$?

   Remarque : quand les ensembles E et F sont disjoints, l'union se note aussi : $E \sqcup F$.
2. Soit M un ensemble fini. Rappeler ce qu'est une partition de M.
3. Soient X et Y deux ensembles finis tels que $X \subset Y$. En partitionnant Y, montrer que $\mathrm{Card}(Y \setminus X) = \mathrm{Card}(Y) - \mathrm{Card}(X)$.
4. Soient A et B deux ensembles finis non disjoints.

   Représenter sous forme de patates ces deux ensembles. Conjecturer une formule donnant le cardinal de $A \cup B$ en fonction de celui de A, de B et de $A \cap B$.
5. Soient A et B deux ensembles finis non disjoints. Partitionner $A \cup B$ en deux ensembles disjoints et démontrer la formule que vous avez conjecturé dans la question précédente.
6. Dans une classe de 40 élèves, 25 parlent couramment l'anglais, 11 parlent couramment l'espagnol et 6 ne parlent ni anglais, ni espagnol.

   Par la suite, on note C l'ensemble des élèves de la classe, A l'ensemble de ceux qui parlent anglais et E l'ensemble de ceux qui parlent espagnol.

   (a) Traduire les données de l'énoncé à l'aide des 3 ensembles.

   (b) Combien y a-t-il d'élèves qui parlent couramment à la fois l'anglais et l'espagnol ? On vous demande de justifier votre résultat à l'aide de formule(s) du cours que vous rappellerez.

3 Fonctions

Si la définition formelle d'une fonction correspond à celle d'un graphe entre deux ensembles vérifiant certaines propriétés, de manière plus intuitive on peut voir ça comme une transformation opérée sur les éléments de l'ensemble de départ, ou comme une correspondance réalisée entre les deux ensembles. Vous programmez déjà des objets appelés fonctions en `CamL` ; il s'agit d'objets qui prennent un argument pour renvoyer un résultat.

Les relations entre deux éléments d'un même ensemble E (comme la relation d'égalité,la relation "inférieure ou égale", la relation d'inclusion entre parties d'un même ensemble ...) peuvent être vues comme des fonctions de $E \times E$ dans l'ensemble des booléens. On distinguera, parmi ces relations, deux types particuliers de relations : les relations d'ordre et d'équivalence, qui permettent de décrire de manière simple une architecture de l'ensemble E. Ce sont les cas particuliers les plus simples d'une architecture de graphe entre les éléments.

3.1 Image directe et réciproque

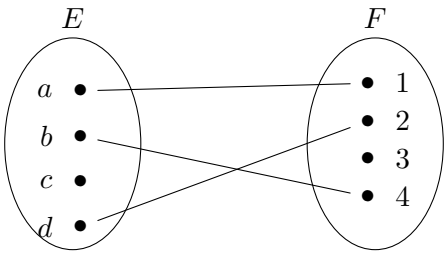
3.1.1 Résumé

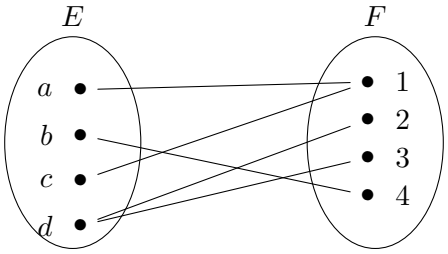
Les concepts d'image et d'image réciproque, que vous connaissez pour des éléments, peuvent être étendus à des ensembles. Vous devrez faire attention aux notations assez similaires ; il ne s'agit pas vraiment d'appliquer la fonction à un ensemble mais de s'intéresser à l'ensemble des valeurs que l'on peut obtenir en prenant un élément de départ dans la partie choisie. De même, la notation pour l'image réciproque ne veut pas dire que la fonction est une bijection réciproque.

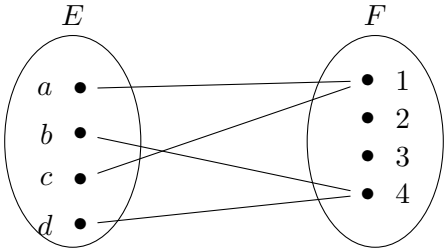
3.1.2 Exercices

Exercice 3.14

Parmi les dessins suivants, quels sont ceux qui représentent une fonction de E vers F ?

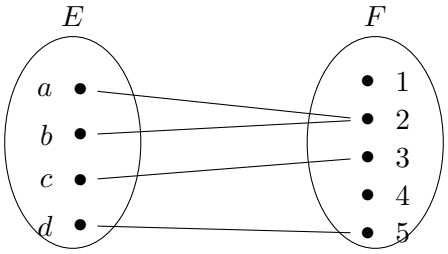






Exercice 3.15

Soit la fonction $f : \{a, b, c, d\} \longrightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dont le graphe est le suivant :



Trouver : $f(\{a, b, c\})$, $f(\{a, b, c, d\})$, $f^{-1}(\{2, 3\})$ et $f^{-1}(\{1, 5\})$.

Exercice 3.16

Pour chacune des propriétés suivantes, dessiner le graphe d'une fonction f de $[\![1, 4]\!]$ dans $[\![1, 5]\!]$ qui la vérifie.

1. $f([\![1, 4]\!]) = \{1, 4\}$
2. $f^{-1}(\{3, 4\}) = \{1, 2\}$
3. $f(\{1, 2, 3\}) = \{3\}$ et $f^{-1}(\{3, 5\}) = \{1, 2, 3\}$.
4. $f^{-1}(\{2\}) = \{2, 3\}$ et $f(\{1, 2\}) = \{1, 2\}$.

Exercice 3.17

Considérons dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ les deux fonctions $f : x \longmapsto \mathrm{e}^x$, $g : x \longmapsto x^2$ et sur $[-\pi, \pi]$ la fonction $h : x \longmapsto \sin(x)$.

1. Représenter graphiquement ces trois fonctions.
2. Déterminer :
   - $f(\mathbb{R})$ et $f^{-1}(\{0\})$;
   - $g([-1, 4])$ et $g^{-1}([-1, 4])$;
   - $h([-\pi, \pi]), h([0, \pi/2]), h^{-1}([0, 1]), h^{-1}([1, 2])$ et $h^{-1}([3, 4])$.

Exercice 3.18

Compléter le tableau suivant.

N.B. : nous vous conseillons de dessiner le graphe des fonctions concernées au brouillon !

f	$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$	$\sin : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$	$\ln :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$
$f(\{0\}) =$			
$f(\,]0, \pi]\,) =$			
$f^{-1}(\{0\}) =$			
$f^{-1}(\{1\}) =$			
$f^{-1}(\,]-\infty, 0]) =$			

3.2 Injectivité et surjectivité

3.2.1 Résumé

L'injectivité et la surjectivité sont deux propriétés fonctionnelles qui n'ont rien en commun : elles portent sur des aspects différents des fonctions. Cependant, elles présentent une bonne complémentarité d'où leur étude simultanée.

Une fonction est injective si elle n'envoie jamais deux éléments différents vers la même image ; cela implique que la connaissance du résultat $f(x)$ permet de retrouver x. Une fonction injective possède donc un côté "réversible" : on peut déduire la donnée de départ du résultat final. L'injectivité est donc fortement liée au domaine de départ de la fonction : on peut restreindre une fonction quelconque à une fonction injective en supprimant tous les "doublons", c'est-à-dire en ne gardant qu'un antécédent pour chaque valeur atteinte.

Une fonction est surjective si elle atteint toutes les valeurs de son ensemble d'arrivée. Celui-ci est donc exactement l'image du domaine de la fonction, ce qui évite les données superflues en sortie. C'est par exemple une bonne propriété pour une table de hachage qui veut répartir des valeurs sur le plus de cellules possible.

Enfin, une fonction à la fois injective et surjective est dite bijective. C'est donc une fonction qui opère une transformation réversible entre deux ensembles ; on verra que l'existence d'une bijection entre deux ensembles implique des liens forts entre eux.

3.2.2 Exercices

Exercice 3.19

Discuter de l'injectivité et la surjectivité de la fonction $\left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ dans les cas suivants :

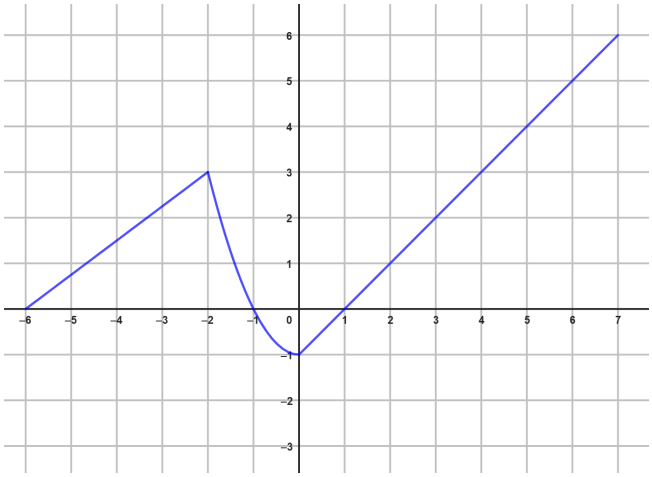
1. $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}$
2. $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}^+$
3. $E = \mathbb{R}^+$ et $F = \mathbb{R}$
4. $E = \mathbb{R}^+$ et $F = \mathbb{R}^+$

Exercice 3.20

1. Construire une fonction injective de $[\![1, 4]\!]$ vers $[\![1, 5]\!]$. Votre fonction peut elle être surjective ?
2. Construire une fonction surjective de de $[\![1, 4]\!]$ vers $[\![1, 3]\!]$. Votre fonction peut elle être injective ?
3. En vous inspirant de vos exemples précédents, construire une fonction bijective.

Exercice 3.21

On considère la fonction f définie de $[-6, 7]$ vers $\mathbb{R}$ dont le graphe est le suivant :

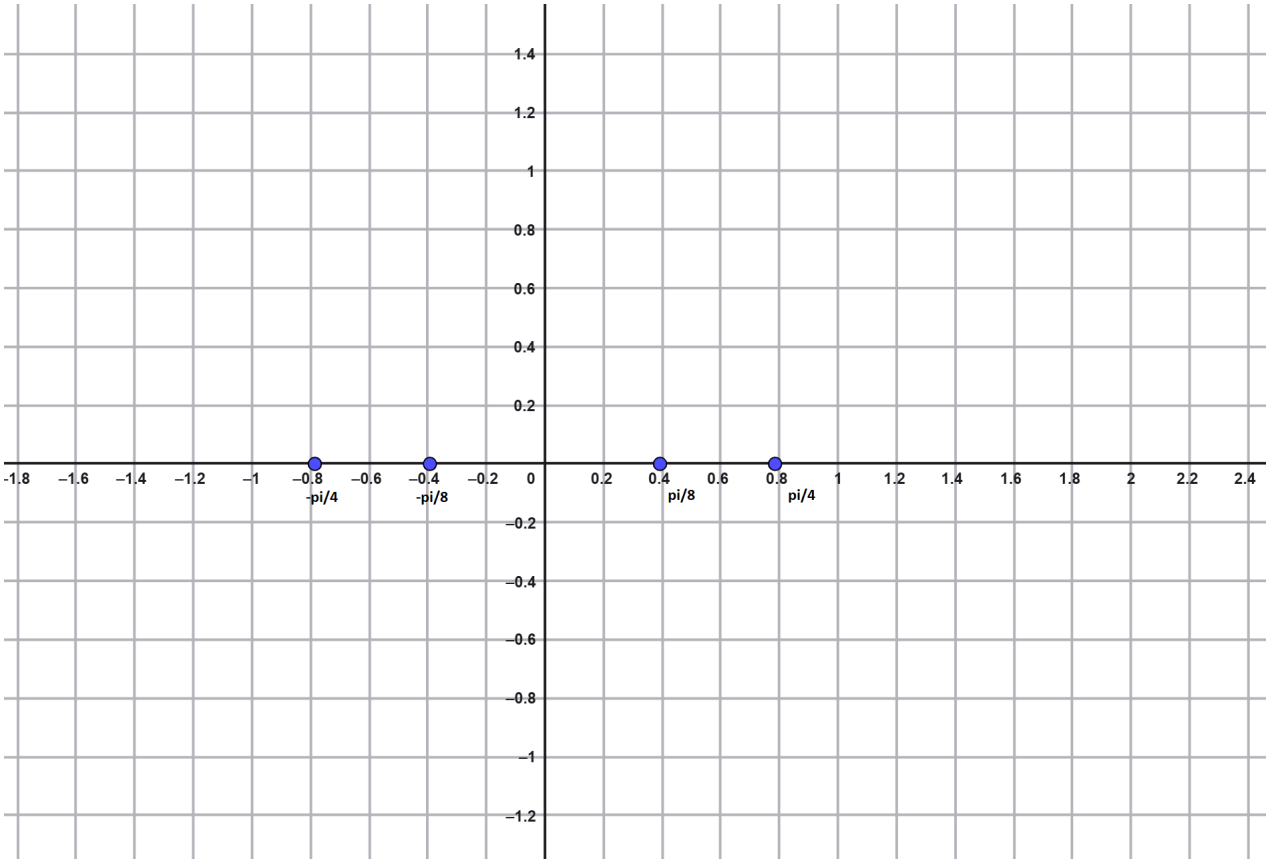


1. Cette fonction est-elle injective de $[-6,7]$ vers $\mathbb{R}$? Même question pour surjective.
2. Déterminer des **intervalles** $A \subset [-6,7]$ et $B \subset \mathbb{R}$ tels que $f : A \longrightarrow B$ soit injective et non surjective.
3. Déterminer des **intervalles** $A' \subset [-6,7]$ et $B' \subset \mathbb{R}$ tels que $f : A' \longrightarrow B'$ soit surjective et non injective.

Exercice 3.22

Soit $f : x \longmapsto \sin(4x)$. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est $\dfrac{\pi}{2}$-périodique.
3. f est-elle paire ? impaire ? ni l'un ni l'autre ? Justifier.
4. Expliquer pourquoi il suffit de faire l'étude de la fonction sur $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$. Comment cela se traduit-il sur $\mathcal{C}_f$?
5. Étude sur $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$. Étudier la dérivée de f sur I et montrer qu'elle change de signe en $\dfrac{\pi}{8}$. Dresser son tableau (complet) de variations.
6. Donner l'allure de la courbe sur $I = \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$.



7. f est-elle bijective de I vers $\mathbb{R}$? Si non, proposer deux intervalles $I' \subset I$ et $J \subset \mathbb{R}$ telle que f soit bijective de I' vers J.

Exercice 3.23

1. Soient f, g et h les fonctions de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 \qquad g(x) = x + 1 \quad \text{et} \quad h(x) = \cos(x).$$

   Expliciter $f \circ f, f \circ g, g \circ f$, $g \circ g$, $g \circ h$ et $h \circ g$.

2. Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, on considère $f : x \longmapsto 2x$, $g : x \longmapsto -2x$ et $h : x \longmapsto x^2$.

   Comparer $h \circ f$ et $h \circ g$. Que peut-on en déduire ?

3. Soient $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$. Quelle(s) composée(s) de fonctions peut-on faire ?

4. Écrire $f : x \longmapsto e^{\sqrt{x^2+1}}$, $g : x \longmapsto \sin^3(\cos(3x + 6))$ et $h : x \longmapsto \ln(\sin^2(x^3))$ comme composées de fonctions usuelles.

Exercice 3.24

Soient E et F deux ensembles et f une fonction bijective de E vers F.

Montrer que :

f bijective de E vers $F \iff \forall\, y \in F, \exists !\, x \in E$ tel que $y = f(x)$.

On admet le résultat suivant :

Théorème : Soient E et F deux ensembles et $f \in F^E$.

f bijective $\iff \exists\, g : F \longrightarrow E$ telle que $\forall\, x \in E$, $g \circ f(x) = x$ et $\forall\, y \in F$, $f \circ g(y) = y$.

Si une telle fonction g existe, alors g est unique et on la note $g = f^{-1}$. On a ainsi, pour f bijective de E vers F :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y & = & f(x) \\ x & \in & E \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & f^{-1}(y) \\ y & \in & F \end{array} \right.$$

et

$$\forall\, x \in E,\ (f^{-1} \circ f)(x) = x \ \text{ et } \ \forall\, y \in F,\ (f \circ f^{-1})(y) = y$$

Le graphe de f^{-1} est obtenu du graphe de f par symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Application : La fonction arctan**. À connaitre par cœur.**

On définit la fonction tangente par : $\tan : x \longmapsto \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

1. Étude de la fonction tangente.

   (a) Donner son domaine de définition D.

   (b) Montrer qu'elle est π-périodique et impaire sur D.

   (c) Calculer sa dérivée. Vous donnerez aussi le coefficient directeur de sa tangente en 0.

   (d) Expliquer, graphiquement, pourquoi tan est bijective de $]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$ vers $\mathbb{R}$.

2. La fonction arctangente.

   (a) Justifier son existence. Donner son domaine de définition et son domaine d'arrivée.

(b) Dessiner le graphe de cette fonction.

(c) Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\arctan'(y) = \dfrac{1}{1+y^2}$.

(d) Remplir le tableau suivant :

α	0		$\frac{\pi}{3}$			$-\frac{\pi}{4}$	$\arctan(x)$
$\tan(\alpha)$		1		$-\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$		x

3. Donner d'autres fonctions usuelles réciproques l'une de l'autre.

★ **Exercice 3.25**

On considère trois ensembles E, F et G ainsi que deux fonctions $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$.

1. Montrer que si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.
2. Montrer que si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.

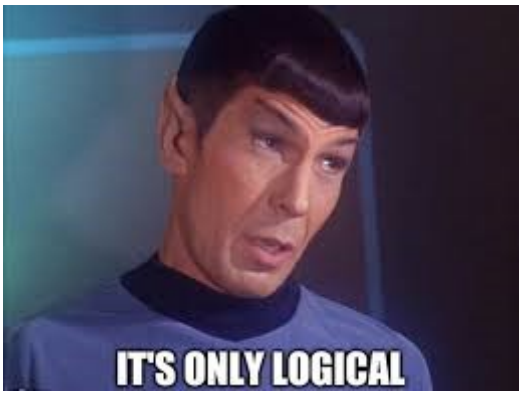
4 Raisonnements

4.1 Résumé

Cette section présente différents types de raisonnement qui aident à prouver la véracité de propriétés mathématiques. Il est en effet rare qu'il n'y ait qu'une seule manière d'arriver à un résultat ; il importe donc d'être capable de savoir quelle démarche utiliser de préférence en fonction des données dont on dispose.

- Le raisonnement direct utilise des implications successives pour arriver au résultat voulu en partant des hypothèses.
- La démarche de la preuve par contraposée consiste à démontrer la contraposée de la proposition voulue, sachant que celle-ci lui est équivalente. Cela peut amener à une reformulation de l'énoncé plus simple à manipuler.
- La preuve par l'absurde consiste à montrer qu'un résultat est faux en prouvant qu'il impliquerait quelque chose que l'on sait être irréalisable. Pour prouver qu'un résultat est vrai, on peut ainsi montrer par l'absurde que sa négation est fausse.
- Le raisonnement par récurrence repose sur deux résultats : la propriété est vraie à un endroit donné, et de là elle se propage « de proche en proche ». Nous étudierons essentiellement des récurrences sur l'ensemble des entiers naturels, mais ce n'est là qu'un cas particulier de preuve par induction [3].

Il est nécessaire de faire le lien entre ce dernier type de raisonnement et la récursivité que vous étudiez en ce moment en algorithmique : savoir écrire une fonction récursive ou une preuve par récurrence, c'est peu ou prou la même démarche ...



4.2 Comment rédiger ?

Voilà les règles à respecter pour démontrer certaines propriétés.

Cas où il faut démontrer « $\forall x \in E,\ P(x)$ »

La première ligne de la démonstration doit être : Soit $x \in E$ fixé.

On prend ensuite un brouillon et on analyse ce qu'il faut démontrer pour savoir comment commencer : de quelle information partir pour arriver au résultat ?

Puis, on reprend sa copie avec le « Soit $x \in E$ » et on écrit un raisonnement logique en utilisant des implications successives. Si pour ce $x \in E$, $P(x)$ est démontrée, c'est donc que la propriété est vraie quelque soit $x \in E$.

Cas où il faut démontrer « $P \Longrightarrow Q$ »

La première ligne de la démonstration doit être : Supposons la propriété P vraie.

3. On peut bien évidemment imaginer étendre le processus à des récurrences sur $\mathbb{Z}$; vous verrez plus tard des récurrences sur des ensembles moins évidents, avec des relations de propagation différentes.

On cherche alors, par implications successives à montrer que la propriété Q est vraie. Ainsi, si P est vraie alors Q est vraie. Donc $P \Longrightarrow Q$.

Cas où il faut démontrer « $P \Longleftrightarrow Q$ »

Cela se fait le plus souvent en deux temps. On montre d'une part que $P \Longrightarrow Q$ et d'autre part que $Q \Longrightarrow P$.

Cas où il faut démontrer une inclusion d'ensembles « $A \subset B$ »

Elle signifie que : $\forall\, x \in A, x \in B$.

La première ligne de la démonstration doit être : Soit $x \in A$ fixé.

Puis, pour ce $x \in A$, on cherche par implications successives à montrer que $x \in B$. Si c'est le cas, on a prouvé qu'un élément quelconque de A est dans B, donc que tous les éléments de A sont dans B.

Cas où il faut démontrer une égalité d'ensembles « $A = B$ »

Cela se fait le plus souvent en deux temps. On montre d'une part que $A \subset B$ et d'autre part que $B \subset A$.



Dernier point : une démonstration se rédige ! ! Il faut utiliser des liens entre les différentes lignes. Cela peut être des symboles mathématiques ou tout simplement des mots comme « alors », « ainsi », « or », « d'où », « donc » etc...

4.3 Exercices

Exercice 4.26

• Raisonnements directs ou par implications successives.

1. Montrer que $\forall\,(x,y) \in]0,1[^2,\ 0 < \dfrac{x+y}{1+xy} < 1$.

   Indication : après en avoir trouvé le signe, développer $(1-x)(1-y)$.

2. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, (6 divise n) $\Longrightarrow$ (3 divise n). La réciproque est-elle vraie ?

3. Montrer que : $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \ x^2+y^2 = 0 \iff x = y = 0$.

4. On considère la fonction f définie sur $I = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$ par $f(x) = \dfrac{x+1}{2x+3}$. En partant des définitions avec les quantificateurs :

   (a) Dire si f est injective. Si oui, préciser les domaines de départ et d'arrivée.

   (b) Dire si f est surjective. Si oui, préciser les domaines de départ et d'arrivée.

   (c) f admet-elle une fonction réciproque ? Si oui laquelle ? Sur quels ensembles de départ et d'arrivée ?

• Raisonnements par inclusion ou double inclusion

5. Soient A l'ensemble des fonctions constantes et B l'ensemble des fonctions paires. Montrer que $A \subset B$. A-t-on $A = B$?

6. Soient $E = \{x \in \mathbb{R},\ x^2+x+2 \leq 2\}$ et $F =]-2,0]$. A t-on $E \subset F$ et $F \subset E$?

7. Soient $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 2x+y = 4\}$ et $B = \{(t-1, 6-2t),\ t \in \mathbb{R}\}$. Montrer que $A = B$.

Exercice 4.27

Dans $\mathbb{Z}$, on définit une relation entre deux entiers de la façon suivante :

$$\forall\,(a,b)\in\mathbb{Z}^2,\ a\,\mathcal{R}\,b \iff a-b \text{ est un multiple de } 3$$

Par exemple, $3\,\mathcal{R}\,15$ car $3-15=-12=3\times(-4)$ et $-4\in\mathbb{Z}$. On dit que 3 est en relation avec 15. En revanche, 4 n'est pas en relation avec 6 car $4-6=-2$ et -2 n'est pas un multiple de 3.

1. Soit $(a,b)\in\mathbb{Z}^2$, traduire avec des quantificateurs « $a-b$ est un multiple de 3. »
2. L'assertion « $\forall\ a\in\mathbb{Z},\ a\,\mathcal{R}\,a$ » est-elle vraie ? Justifier.
3. L'assertion « $\forall\ (a,b)\in\mathbb{Z}^2,\ a\,\mathcal{R}\,b \implies a\,\mathcal{R}\,b$ » est-elle vraie ? Justifier.
4. L'assertion « $\forall\ (a,b)\in\mathbb{Z}^2,\ a\,\mathcal{R}\,b$ et $b\,\mathcal{R}\,a \implies a=b$ » est-elle vraie ? Justifier.
5. L'assertion « $\forall\ (a,b,c)\in\mathbb{Z}^3,\ a\,\mathcal{R}\,b$ et $b\,\mathcal{R}\,c \implies a\,\mathcal{R}\,c$ » est-elle vraie ? Justifier.

Exercice 4.28

Soit $n\in\mathbb{N}$. En utilisant un raisonnement par contraposée, montrer que si n^2 est pair, alors n est pair.

Exercice 4.29

1. En raisonnant par contraposée, montrer que
$$(\,\forall\,\varepsilon>0,\ a<b+\varepsilon\,)\implies a\leq b$$
2. Démontrer qu'il y a en fait équivalence.

Exercice 4.30

Montrer par l'absurde que $\dfrac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

★ **Exercice 4.31**

En utilisant le résultat de l'exercice 4-28, montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Indice : on utilisera le fait qu'un nombre rationnel positif peut s'écrire sous la forme d'une fraction irréductible $\dfrac{p}{q}$ où p est positif, q est strictement positif et p et q sont premiers entre eux, c'est-à-dire n'ont aucun diviseur positif en commun excepté 1.

Exercice 4.32

1. Par récurrence, montrer que : $\forall\,n\in[\![6,+\infty[\![,\ 2^n\geq 6n+7$
2. Par récurrence, montrer que : $\forall\,n\in\mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$
3. Soit $f:x\mapsto xe^x$ dérivable une infinité de fois sur $\mathbb{R}$ et $x\longmapsto f^{(n)}(x)$ la dérivée n-ième de f $(n\in\mathbb{N})$.

   Montrer que $\forall\,n\in\mathbb{N}$ et $\forall\,x\in\mathbb{R}\ f^{(n)}(x)=(x+n)e^x$.
4. Soit (u_n) une suite telle que : $\forall\,n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=u_n+2n+3$ avec $u_0=1$. Montrer que : $\forall\,n\in\mathbb{N}$, $u_n=(n+1)^2$.

Exercice 4.33

Travail maison.

1. Montrer que : $\forall (x,y) \in \mathbb{Q}^2 \quad [x < y \Longrightarrow \exists\ q \in \mathbb{Q},\ x < q < y]$
2. Soient f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall\, x \in [0,2]$, $f(x) \in [1,2]$ et (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0,5 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

   Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0,2]$
3. Soit a un réel positif. Montrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, a^n + na^{n-1} \leq (a+1)^n$.
4. Montrer par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{1\times 2} + \dfrac{1}{2\times 3} + \dfrac{1}{3\times 4} + \ldots + \dfrac{1}{n\times(n+1)} = 1 - \dfrac{1}{n+1}$